Un exemple simple de bifurcation : la bifurcation de Feigenbaum

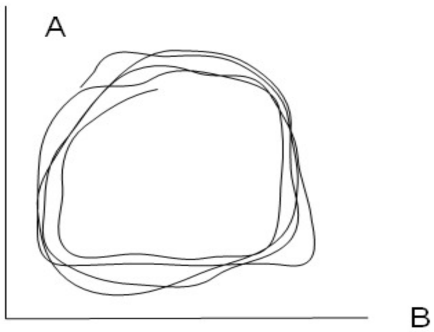
2008

Marie-France Ciceri
Chargée de recherche à France-Telecom

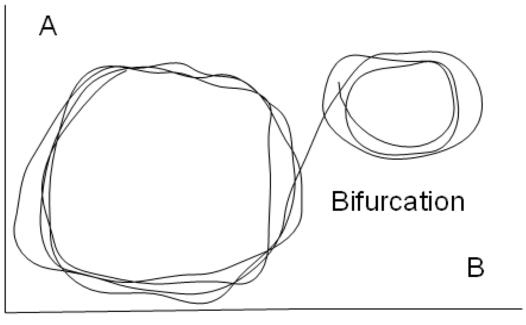
Bernard Marchand
Professeur émérite des Universités

Pendant presque deux siècles, les physiciens, comme les économistes, se sont intéressés aux situations d'équilibre, considérant comme négligeables ou impossible à traiter les systèmes qui basculaient hors de l'équilibre. Les économistes, par exemple, ont longtemps développé la *turn-pike theory* supposant que les économies des différents pays tendaient plus ou moins vite vers la même trajectoire caractéristique. Dans les années 1960-70, un intérêt nouveau, grâce au bouillonnement des idées à cette époque, a été porté, en particulier par le laboratoire d'Illya Prigogine[1], aux systèmes qui rompent leur équilibre, dont la trajectoire *bifurque*, et qui basculent dans le *chaos*.

Imaginons un système formé de deux variables A et B qui changent au cours du temps, entre certaines limites. Le système possède un équilibre. On peut représenter dans un plan le chemin suivi comme une trajectoire : des fluctuations aléatoires en éloignent parfois le système, mais il retombe dan son équilibre, comme si il était attiré. D'où le nom d'*attracteur* donné à cette trajectoire :



Certains systèmes particulièrement complexes ont la curieuse propriété de changer d'eux-mêmes d'équilibre et de bifurquer pour suivre une nouvelle trajectoire. Cet *attracteur étrange* est extrêmement sensible aux conditions initiales ; une altération infime dans une variable peut provoquer des changements considérables et disproportionnés dans le système. C'est le fameux *battement d'aile du papillon* dans l'Atlantique qui provoque une tempête dans le Pacifique (parabole exagérée mais souvent reprise) .C'est très certainement le cas de bien des grandes agglomérations urbaines, qui forment des systèmes complexes. Ces systèmes urbains ont été étudiés par exemple par Peter Allen[2] et, en particulier par Denise Pumain et son laboratoire[3] :



1 Prigogine I & I Stengers (1979) *La nouvelle alliance*, Gallimard, paris.
2 Allen P & M Sanglier (1981) « Urban Evolution, Self-Organisation and Decision Making », *Environment and Planning*, vol 13, pp 167-183.
3 Pumain D, Sanders L & Th Saint-Julien (1989) *Villes et auto-organisation*, Economica, Paris, 191 p.

Le mathématicien Mitchell Feigenbaum a proposé des familles de fonctions qui bifurquent.

Le petit logiciel ci-joint en donne un exemple simple (**ProjFeig,exe**, sous Windows).

Il illustre un système dynamique indiqué par Feigenbaum, qui bifurque pour certaines valeurs du paramètre m :

$$\mathbf{x_{t+1} = 1 - (m\, x^2_t)}$$

On en trouvera une excellente présentation dans :

http://cours-info.iut-bm.univ-fcomte.fr/wiki/pmwiki.php/SDD/LaBifurcationDeFeigenbaum.

Donnez à **x** n'importe quelle valeur entre -1 et +1, à **m** une valeur comprise entre 0 et 2. Pour de faibles valeurs de **m**, **x** évolue avec 1, 2 ou quatre états d'équilibre, mais pour **m** proche de 2, le système devient vite chaotique.

Les états du système varient principalement en fonction des valeurs de **m** :

- entre 0 et 0.75 : le système tend vers un équilibre unique ; pour m = 0.7, par exemple, on observe deux états qui convergent rapidement ;
- entre 0.75 et 1.25 : deux positions d'équilibre ;
- entre 1.25 et 1.4 : 4 états d'équilibre ;
- au-delà de 1.4, le système est chaotique, avec des oasis d'équilibre : par exemple, pour m =1,7685.

Remarquez la sensibilité à un très faible changement de **m** : approchez m de 2,0 progressivement ; pour m = 1,99999, le système est chaotique ; pour m = 2,0, il est en équilibre. En outre, il existe, au milieu du chaos, des oasis de calme : trouvez-les; (par exemple, changez peu à peu **m** de 1.5 à 1.6).